



Inhalt:

- *Definition*
- *Eigenschaften*
- *Operationen*
- *Zahlenmengen*
- *Dimensionen*

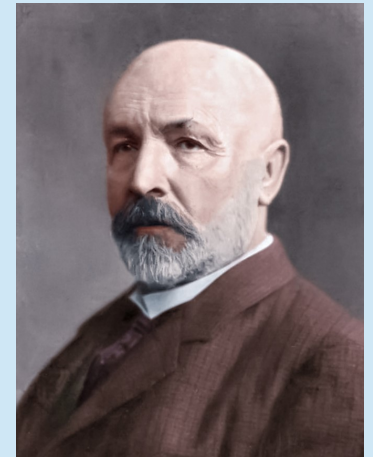


Die Mengenlehre bildet die mathematische Grundlage eines der interessantesten Teilgebiete der Informationstechnik – der Theorie relationaler Datenbanken. Daher werden im Folgenden einige wesentliche Konzepte der Mengenlehre dargestellt.

Die Mengenlehre wurde vom Georg Cantor entwickelt.

Definition (G. Cantor, 1895):

Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f1/Georg_Cantor-_colorized.jpg
Photocolorization, CC BY-SA 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>
via Wikimedia Commons



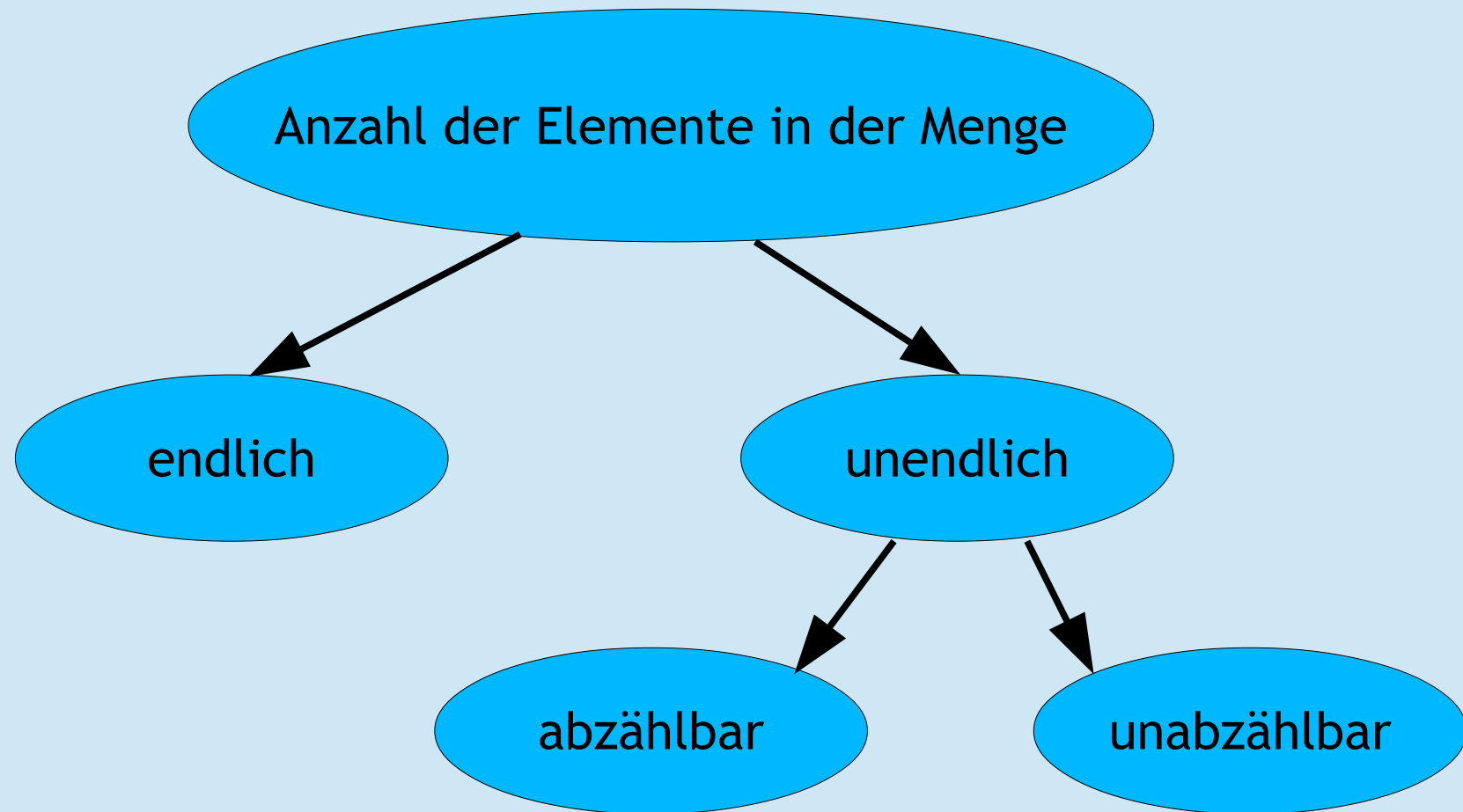
Eigenschaften einer Menge:

1. *Die Natur der Elemente ist unerheblich.*
2. *Alle Elemente sind unterschiedlich.*
3. *Bezeichnung: $M = \{ e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \}$, $e_i \in M$.*
4. *Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle.*

Beispiele:

- *Menge aller Computer im Unternehmen.*
- *Menge der positiven Zahlen.*
- *Menge der Elektronen im Universum.*

Die geordneten Mengen werden unten betrachtet.





In der Mengenlehre gibt es einige besondere Bezeichnungen, die auch in anderen Teilgebieten der Informationstechnik und in der Mathematik verwendet werden.

Quantoren:

\forall – ein beliebiges Element, alle Elemente.

\exists – existiert ein Element, ein Element kann gefunden werden.

Mit Hilfe von Quantoren werden die Aussagen in der Mengenlehre (und überhaupt sehr oft in Mathematik) geschrieben.



Folgende allgemeine Operationen sind über die Mengen definiert:

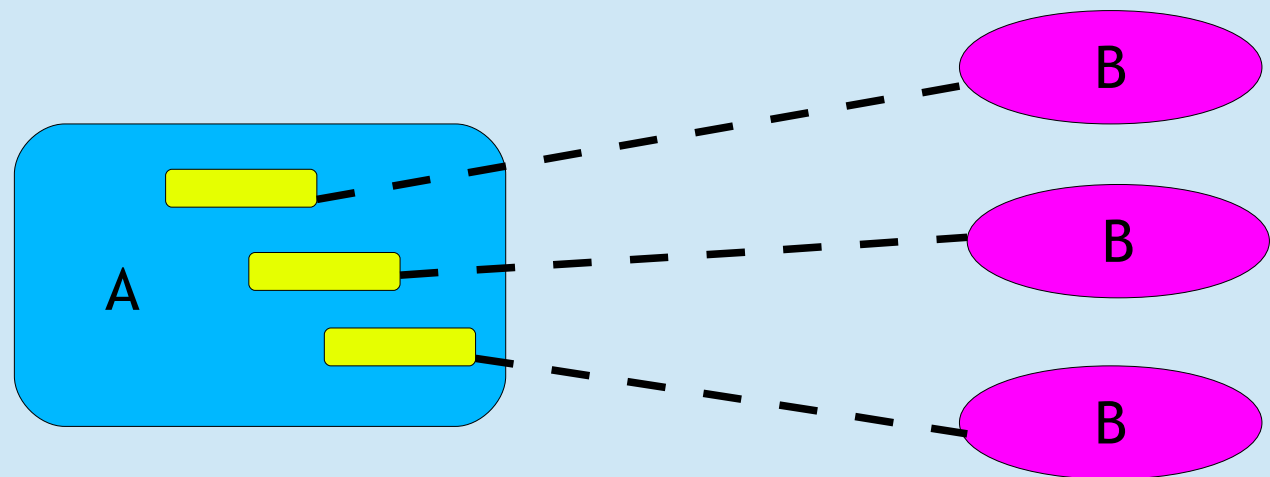
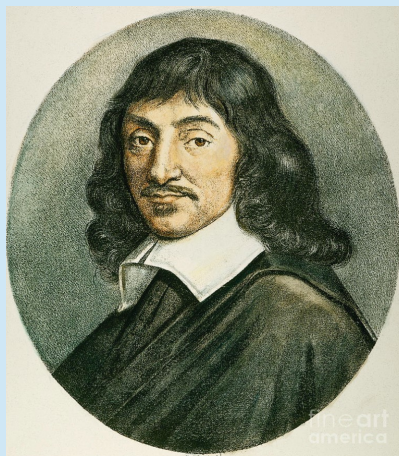
- *Kartesisches Produkt, Kreuzprodukt;*
- *Vereinigung;*
- *Durchschnitt, Schnittmenge;*
- *Differenz.*

Für konkrete Mengen können auch andere Operationen definiert werden.



Definition Kartesisches Produkt

$$A \times B = \{ (a,b) \mid \forall a \in A \text{ und } \forall b \in B \}$$



<http://www.math.uni-hamburg.de/home/rueting/Projekte.htm>

<http://civilka.ru/glossariy/dekart.html>

CC BY-SA 4.0

$$A = \{ +, - \}$$

$$B = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= \{ (+,1), (-,1), (+,2), (-,2), (+,3), (-,3) \} \\ &= \{ +1, -1, +2, -2, +3, -3 \} \end{aligned}$$



Kartesisches Produkt von mehreren Mengen:

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \\ \{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \mid \forall m_i \in M_i \ \forall i \in [1, \dots, n] \}$$

Die Elemente des Kartesischen Produkts von mehreren Mengen heißen n -Tupel.

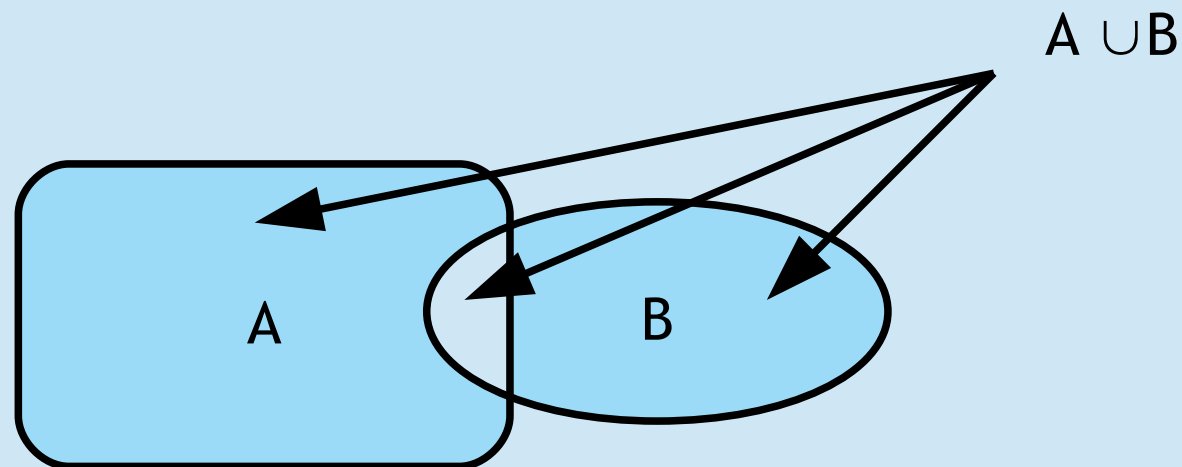
- $n = 2$: *Paar, Dupel.*
- $n = 3$: *Tripel.*
- $n = 4$: *Quadrupel.*
- $n = 5$: *Quintupel.*



Definition Vereinigung

$$A \cup B = \{ e \mid \forall e, e \in A \text{ oder } e \in B \}$$

*Zur Vereinigung gehören alle Elemente aus A und alle Elemente aus B
(keine Verdoppelung der Elemente).*

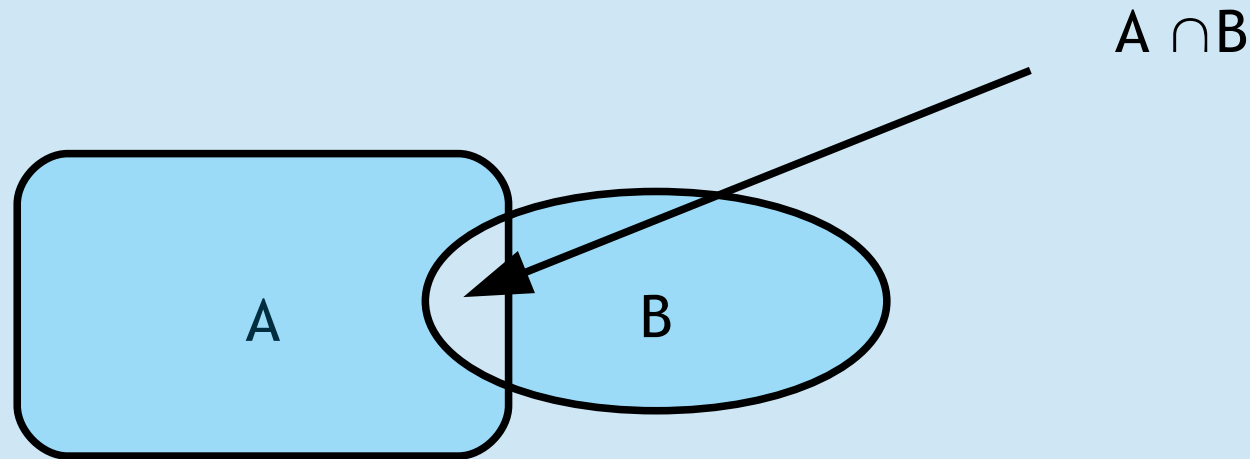




Definition Durchschnitt

$$A \cap B = \{ e \mid \forall e, e \in A \text{ und } e \in B \}$$

Zum Durchschnitt gehören die Elemente aus A und aus B, die gleichzeitig zu A und zu B gehören.

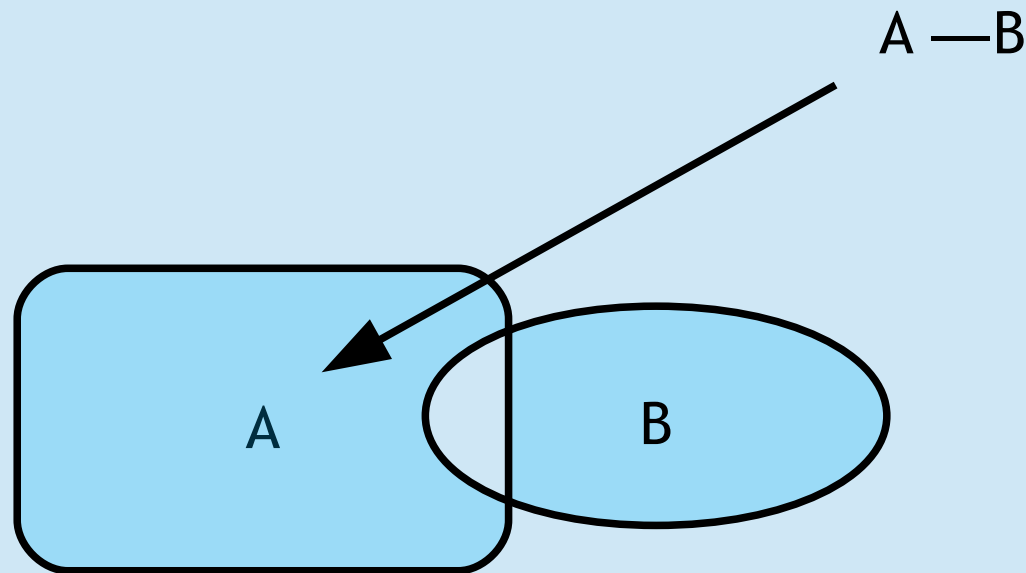




Definition Differenz

$$A - B = \{ e \mid \forall e, e \in A \text{ und } e \notin B \}$$

Zur Differenz gehören die Elemente aus A, die zu B nicht gehören.





Folgende Zahlenmengen spielen wichtige Rolle in Mathematik, Informatik, Programmierung, Datenbanken:

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \};$ /* 0 ? */
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \};$
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{ q \mid \exists x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow q = x/y \};$
- irrationale Zahlen $\mathfrak{I} = \{ s \mid \forall x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \Rightarrow s \neq x/y \};$
- reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathfrak{I};$
- komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{ z = a+bi \mid \forall a, b \in \mathbb{R}, i \times i = -1 \}.$

Diese Mengen außer \mathbb{C} haben natürliche (lineare) Ordnung.

Es gelten folgende Inklusionen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



Für die ganzen Zahlen sind die Operationen definiert:

- *Addition;*
- *Subtraktion;*
- *Multiplikation;*
- *Ganzzahlige Division liefert zwei Ergebnisse – Quotient und Rest, die eigentlich zwei unterschiedliche Operationen darstellen.*

Für die reellen Zahlen sind die Operationen definiert:

- *Addition;*
- *Subtraktion;*
- *Multiplikation;*
- *Reelle Division liefert nur ein Ergebnis – Quotient. Rest der Division ist standardmäßig nicht definiert.*



Gegeben seien die Mengen R_1 und R_2 mit

$$\dim(R_1) = k \quad \dim(R_2) = n$$

Dann:

- $\dim (R_1 \times R_2) = k \cdot n$
- $\dim (R_1 \cup R_2) \in \{ \max \{k,n\}, \dots, k+n \}$
- $\dim (R_1 \cap R_2) \in \{ 0, 1, \dots, \min \{k,n\} \}$
- $\dim (R_1 - R_2) = k - \dim \{ R_1 \cap R_2 \}$

